Линейное программирование
Симплекс-метод

Роланд Хильдебранд

Методы оптимизации, ФУПМ МФТИ, апрель 2022 г.

План

- решение ЛП над элементарными полиэдрами
- представление вершин множеством базисных индексов
- симплекс-таблица
- симплекс-метод
- двойственный симплекс-метод
- приложение: целочисленное линейное программирование

Оптимизация над симплексом

необходимо минимизировать функционал $\langle c, x\rangle$ на симплексе

стандартный симплекс бывает двух видов:

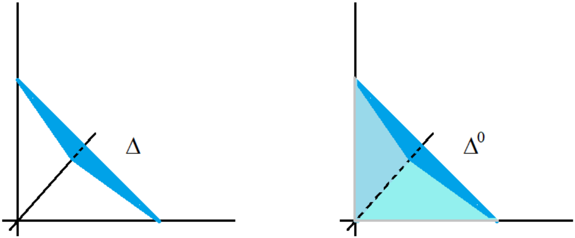
- $\Delta = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x \geq 0,\ \langle x, 1\rangle = 1\}$
- $\Delta^0 = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x \geq 0,\ \langle x, 1\rangle \leq 1\}$

у Δ имеется n вершин, а именно – орты e_j
у Δ^0 имеется $n+1$ вершин — орты e_j и начало координат 0

имеем явные решения

$$\min_{x\in\Delta} \langle c, x\rangle = \min_j\ c_j$$

$$\min_{x\in\Delta} \langle c, x\rangle = \min(0, \min_j\ c_j)$$



стандартные симплексы в $\mathbb{R}^3$

Оптимизация над политопом с малым числом вершин

пусть политоп P задан как выпуклая оболочка

$$P = \operatorname{conv}\{x_1, \dots, x_m\}$$

тогда имеем

$$\min_{x \in P} \langle c, x \rangle = \min_j \langle c, x_j \rangle$$

решать линейную программу перебором значений функционала на вершинах имеет смысл если

- политоп уже задан как выпуклая оболочка или вершины просто вычислить
- число вершин небольшое (например, линейное или квадратичное по длине формулировки задачи)

частный случай:

$$\min_{\|x\|_1 \le 1} \langle c, x \rangle = -\max_j |c_j| = -\|c\|_\infty$$

Оптимизация над полиэдром

пусть полиэдр P задан экстремальными элементами:

$$P = \left\{ \sum_{j=1}^{J} \lambda_j x_j + \sum_{k=1}^{K} \mu_k u_k \mid \lambda \geq 0,\ \mu \geq 0,\ \langle \lambda, 1 \rangle = 1 \right\}$$

здесь x_j — вершины, u_k — экстремальные рецессивные направления

тогда

$$\min_{x \in P} \langle c, x \rangle = \begin{cases} -\infty, & \exists\, k : \langle c, u_k \rangle < 0, \\ \min_j \langle c, x_j \rangle, & \langle c, u_k \rangle \geq 0\ \forall\, k \end{cases}$$

имеет смысл использовать, если J, K небольшие и x_j, u_k известны

Оптимизация над кубом и зонотопом

пусть $X = \{x \mid \|x\|_\infty \leq 1\} = [-1, 1]^n$

тогда

$$\min_{x \in X} \langle c, x \rangle = -\sum_{j=1}^{n} |c_j| = -\|c\|_1$$

множество вида

$$Z = b + A[X] = b + \operatorname{conv} \left\{ \sum_{j=1}^{n} \sigma_j a_j \mid \sigma \in \{-1, +1\}^n \right\}$$

где a_j — столбцы A, называется *зонотопом*

зонотоп — это проекция куба

$$\min_{z \in Z} \langle c, z \rangle = \langle c, b \rangle - \sum_{j=1}^{n} |\langle c, a_j \rangle|$$

Роль вершин в задачах ЛП

симплекс-метод основан на следующем факте

Лемма

Пусть X — допустимое множество задачи ЛП, не содержащее прямой, и задача имеет решение. Тогда существует вершина X, являющяяся решением.

- множество решений X' — пересечение X с аффинным подпространством A — уровнем функционала цены
- X' также не содержит прямой
- X' имеет вершину
- вершина X' является также вершиной X, поскольку A — либо всё пространство, либо опорная плоскость

достаточно искать решение среди вершин, их конечное число

Представление вершин

пусть $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \le b\}$ — полиэдр с непустой внутренностью, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $x^* \in P$ — вершина

тогда существует множество индексов $I = \{i_1, \dots, i_n\} \subset \{1, \dots, m\}$ такое, что строки $a_{i_1}, \dots, a_{i_n}$ матрицы A линейно независимы, и x^* является решением линейной системы

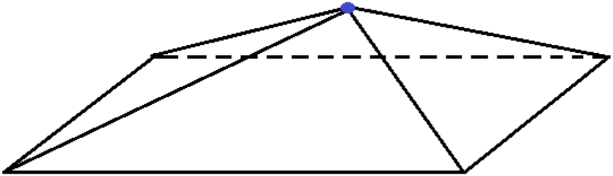
$$\langle a_{i_k}, x \rangle = b_{i_k}, \quad k = 1, \dots, n$$

т.е. x^* задаётся n активными линейно независимыми ограничениями

- пусть I' — множество индексов всех активных ограничений
- $\{a_i\}_{i \in I'}$ генерируют всё пространство $(\mathbb{R}^n)^*$, иначе x^* — не вершина
- можно выбрать n линейно независимых a_i

Представление вершин

- множество I может быть не единственно для данной вершины
- множество I позволяет восстановить вершину решением линейной системы $n \times n$
- не всякое множество индексов I мощностью n соответствует вершине P



пример неединственности представления вершины через индексное множество активных ограничений

Полиэдр из ЛП стандартного вида

рассмотрим ЛП стандартного вида

$$\min_{x \geq 0} \langle c, x \rangle : \qquad Ax = b$$

где $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$

предположения:

- строки A линейно независимы
- функционал не постоянен на допустимом множестве X

вершина X определяется множеством $I \subset \{1, \ldots, n\}$ линейно независимых активных ограничений мощности $\dim X = n - m$
все активные ограничения — вида $x_i = 0$
линейную независимость ограничений надо рассматривать в аффинной оболочке множества X

Базисное множество индексов

активные ограничения дают равенства вида $\langle e_i, x\rangle = 0$

ограничения независимые в аффинной оболочке X если e_i независимы совместно со строками A, т.е.

$$\det \begin{pmatrix} A \\ e_{i_1}^T \\ \dots \\ e_{i_{n-m}}^T \end{pmatrix} \neq 0$$

это эквивалентно условию, что оставшиеся столбцы A линейно независимы:

$$\det(a_i)_{i \notin I} \neq 0$$

индексное множество $B = \{i \mid i \notin I\} = \{1, \dots, n\} \setminus I$ называется *базисным*

Базисное множество индексов

- мощность B равна числу m условий равенства в ЛП
- столбцы a_i, $i \in B$ матрицы A образуют базис пространства $\mathbb{R}^m$
- значения x_i, $i \in B$ восстанавливаются решением системы $\sum_{i \in B} a_i x_i = b$ размера $m \times m$

- не каждое множество B линейно независимых столбцов a_i представляет вершину X
- данная вершина X может представляться несколькими множествами B
- вершина однозначно воостанавливается из B

Преобразование задачи

введём дополнительную переменную x_0, которую свяжем с остальными через уравнение

$$x_0 + \langle c, x \rangle = 0$$

тогда условия равенства запишутся в виде

$$\tilde{A}x := \begin{pmatrix} 1 & c^T \\ 0 & A \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix} =: \tilde{b}$$

определим также $\tilde{B} = B \cup \{0\}$, $N = \{1, \ldots, n\} \setminus B$

столбцы a_i, $i \in B$ матрицы A независимы тогда и только тогда, когда $\tilde{a}_i$, $i \in \tilde{B}$ независимы

разделив $x, \tilde{A}$ на соответствующие блоки, можно переписать систему в виде

$$\tilde{A}_{\tilde{B}} x_{\tilde{B}} + \tilde{A}_N x_N = \tilde{b}$$

отсюда получаем

$$x_{\tilde{B}} + \tilde{A}_{\tilde{B}}^{-1} \tilde{A}_N x_N = \tilde{A}_{\tilde{B}}^{-1} \tilde{b}$$

Симплекс-таблица

задача запишется в виде

$$\max_{x_B \geq 0, x_N \geq 0, x_0} x_0 : \qquad x_{\tilde{B}} + \tilde{A}_{\tilde{B}}^{-1} \tilde{A}_N x_N = \tilde{A}_{\tilde{B}}^{-1} \tilde{b}$$

информацию можно более компактно записать в *таблице*

$$T = \tilde{A}_{\tilde{B}}^{-1} \tilde{b} \; \mid \; \tilde{A}_{\tilde{B}}^{-1} \tilde{A}_N$$

- нулевая строка T_{0*} таблицы кодирует цену
- другие строки T_{i*} соответствуют базовым переменным
- столбцы T_{*j} соответствуют небазовым переменным
- нулевой столбец T_{*0} содержит значения x_0 и базовых переменных в текущей вершине

Допустимость таблицы

таблица T называется *допустимой*, если $T_{i0} \geq 0$ для всех $i \in B$

это эквивалентно условию $x_B \geq 0$, и таблица соответствует вершине полиэдра X

таблица T называется *двойственно допустимой*, если $T_{0i} \geq 0$ для всех $i \in N$

цена имеет вид
$$-x_0 = -T_{00} + \langle T_{0*}, x_N \rangle$$
и не может быть меньше текущего значения $-T_{00}$ для любого $x_N \geq 0$, а значит и для любой допустимой точки задачи

таблица T называется *оптимальной*, если $T_{i0} \geq 0$ для всех $i \in B$ и $T_{0i} \geq 0$ для всех $i \in N$

тогда $(x_B, x_N) = (T_{*0}, 0)$ является решением задачи, а $-T_{00}$ — оптимальным значением

Пример

рассмотрим ЛП

$$\min_{x \in \mathbb{R}^3_+} \langle e_3, x \rangle : \qquad Ax := \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} =: b$$

имеем $n = 3$, $m = 2$, $\#B = 2$, $\#N = 1$

умножая матрицу

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & e_3 \\ b & 0 & A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

на обратные подматриц из столбцов $\{2, 3, 4\}$, $\{2, 3, 5\}$, $\{2, 4, 5\}$ и опуская получившуюся единичную подматрицу, получаем таблицы для базисных множеств $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$, $\{2, 3\}$, соответственно

$B = \{1,2\}$, $N = \{3\}$: двойственно допустима

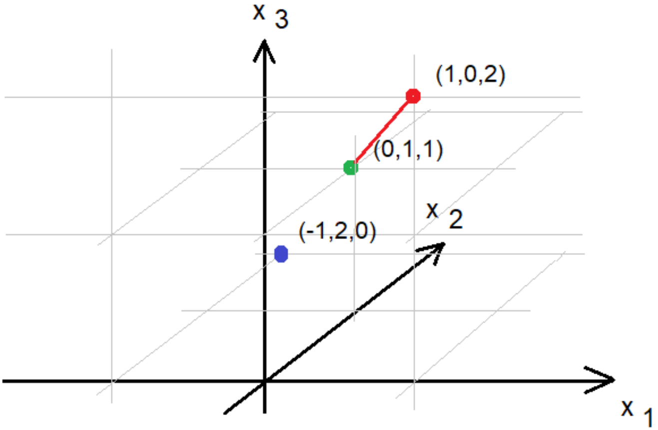
	rhs	x_3
x_0	0	1
x_1	-1	-1
x_2	2	1

$B = \{1,3\}$, $N = \{2\}$: допустима

	rhs	x_2
x_0	-2	-1
x_1	1	1
x_3	2	1

$B = \{2,3\}$, $N = \{1\}$: оптимальна

	rhs	x_1
x_0	-1	1
x_2	1	1
x_3	1	-1



красный сегмент — допустимое множество в прямой ЛП
зелёная точка — решение задачи
синяя точка — генерируется множеством $B = \{1, 2\}$, но не допустима

Двойственная задача

для данного базового множества B ЛП записывается через элементы таблицы в виде

$$\min_{x_N\geq 0, x_B\geq 0} (\langle T_{0*}, x_N\rangle - T_{00}) : \quad (I \;\; T_{**}) \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix} = T_{*0}$$

здесь $*$ пробегает все индексы кроме нуля

рассмотрим двойственную ЛП

$$\max_{s_N\geq 0, s_B\geq 0, y} (\langle T_{*0}, y\rangle - T_{00}) : \qquad \begin{pmatrix} s_B \\ s_N \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} I \\ T_{**}^T \end{pmatrix} y = \begin{pmatrix} 0 \\ T_{0*} \end{pmatrix}$$

получаем $y = -s_B$ и

$$s_N - T_{**}^T s_B = T_{0*}$$

функционал цены на *минимизацию* становится равным

$$\langle T_{*0}, s_B\rangle + T_{00}$$

Двойственная таблица

получаем двойственную задачу

$$\min_{s_B \geq 0, s_N \geq 0} \left(\langle T_{*0}, s_B \rangle + T_{00} \right) : \quad \left(I \ - T_{**}^T \right) \begin{pmatrix} s_N \\ s_B \end{pmatrix} = T_{0*}$$

условие комплементарности гласит

$$x_i s_i = 0 \qquad \forall \ i = 1, \ldots, n$$

поэтому естественно принять $\{s_i \mid i \in B\}$ в качестве *небазовых* переменных, а $\{s_i \mid i \in N\}$ в качестве *базовых*

отсюда получаем таблицу для двойственной ЛП в этой вершине

	rhs	s_B
s_0	$-T_{00}$	T_{*0}
s_N	T_{0*}	$-T_{**}^T$

Двойственность

каждая таблица для прямой ЛП соответствует некоторой таблице для двойственной ЛП

небазовые двойственные переменные соответствуют базовым прямым и наоборот

таблицы получаются друг из друга

- транспонированием
- умножением диагональных блоков на -1

допустимость и двойственная допустимость таблицы меняются местами

двойственная таблица оптимальна тогда и только тогда, когда оптимальна прямая

Пример

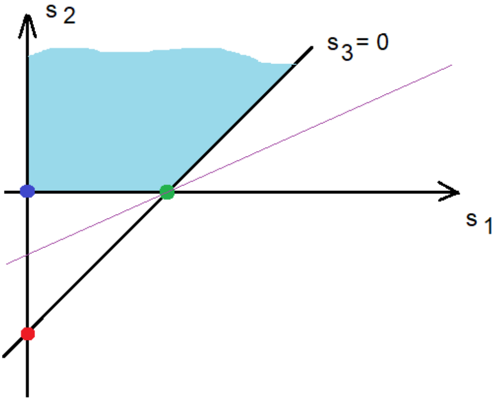
в примере двойственная задача имеет вид

$$\max_{s \in \mathbb{R}^3_+, y \in \mathbb{R}^2} (y_1 + 2y_2) : \quad s + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} y = e_3$$

удалив $y = (s_1, -s_2)^T$, получаем

$$\max_{s_1 \geq 0, s_2 \geq 0} (s_1 - 2s_2) : \quad s_3 = -s_1 + s_2 + 1 \geq 0$$

вершины в двойственном пространстве имеют две нулевые компоненты



голубое множество — допустимое для двойственной задачи
фиолетовая линия — линия уровня функционала цены
зелёная точка — решение двойственной задачи
красная точка — генерируется $B = \{2, 3\}$, но недопустима

Симплекс-метод

цель метода — найти оптимальную таблицу

метод генерирует новые таблицы, перебрасывая индексы из множества B в N и обратно
на каждом шаге B, N обмениваются парой индексов

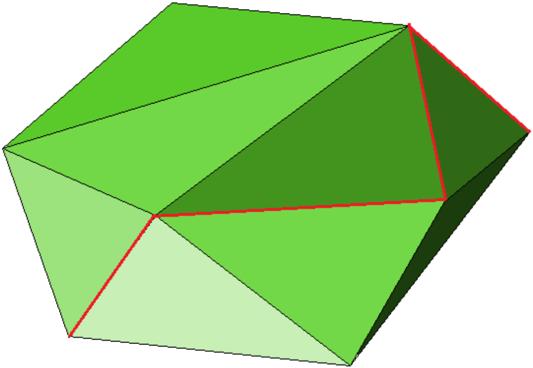
прямой симплекс-метод:

- таблица всегда допустима
- метод стремится сделать таблицу двойственно допустимой
- ходит по вершинам допустимого множества прямой задачи

двойственный симплекс-метод:

- таблица всегда двойственно допустима
- метод стремится сделать таблицу допустимой
- ходит по вершинам допустимого множества двойственной задачи

Геометрическая интерпретация



метод ходит по вершинам полиэдра по пути, состоящем из рёбер

итерация может также остаться в той же вершине

Преобразование таблицы

как меняется таблица при обмене индексов $i \in B$, $j \in N$?

пусть $\hat{N} = \{0\} \cup N \setminus \{j\}$, $\hat{B} = \{0\} \cup B \setminus \{i\}$
преобразование имеет вид

$$\begin{array}{ccc} i & \leftarrow & j \\ j & \leftarrow & i \\ T_{\hat{B}\hat{N}} & \leftarrow & T_{\hat{B}\hat{N}} - T_{ij}^{-1} T_{\hat{B}j} T_{i\hat{N}} \\ T_{\hat{B}i} & \leftarrow & -T_{ij}^{-1} T_{\hat{B}j} \\ T_{j\hat{N}} & \leftarrow & T_{ij}^{-1} T_{i\hat{N}} \\ T_{ji} & \leftarrow & T_{ij}^{-1} \end{array}$$

цена итерации $O(m(n-m))$ операций

Выбор индексов

прямой симплекс-метод:

- выбор индекса $j \in N$ такого, что $T_{0j} < 0$
- выбор $i \in B$ такого, что $T_{*0} \leftarrow T_{*0} - T_{ij}^{-1} T_{*j} T_{i0} \geq 0$, $T_{j0} \leftarrow T_{ij}^{-1} T_{i0} \geq 0$

в частности $T_{ij} > 0$, $T_{*0} \geq T_{ij}^{-1} T_{*j} T_{i0}$, и

$$i = \arg\min_k T_{k0} T_{kj}^{-1} : \quad T_{kj} > 0$$

- если нет индекса $j \in N$ такого, что $T_{0j} < 0$, то таблица оптимальна
- если нет индекса $i \in B$ такого, что $T_{ij} > 0$, то задача неограничена

соответствующие правила для двойственного симплекс-метода

Поиск допустимой таблицы

если изначально нет ни прямой, ни двойственной допустимой точки, то методу нужно пройти *фазу 1* для построения допустимой таблицы

рассмотрим вспомогательную задачу (напомним, что $b \geq 0$)

$$\min_{x\geq 0, z\geq 0} 1^T z \quad : \qquad Ax + z = b$$

для неё есть допустимая точка $(x, z) = (0, b)$, в которой цена равна $\langle 1, b - Ax \rangle$

z базовые, x небазовые, это соответствует таблице

$-1^T b$	$-1^T A$
0	c^T
b	A

все переменные z нужно вывести из базового множества и затем удалить соответствующие столбцы
вторая строка виртуальная, для того, чтобы следить на настоящей ценой

Пример: прямой симплекс

рассмотрим ЛП

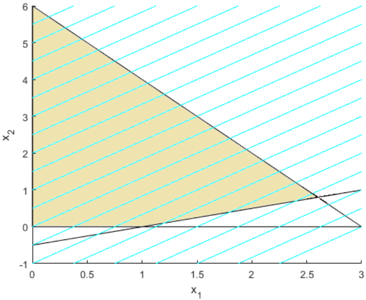
$$\min_{x \in \mathbb{R}^2_+} (3x_2 - 4x_1) :$$

$$x_1 - 2x_2 \leq 1, \; 2x_1 + x_2 \leq 6$$

вводим невязки

$$x_3 = 1 - x_1 + 2x_2, \; x_4 = 6 - 2x_1 - x_2$$

обозначим в таблицах $\xi = T_{0*}$, $\mu = T_{*0}$, $M = T_{**}$

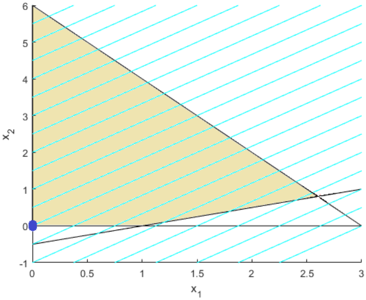


допустимое множество и линии уровня цены

вершина $(x_1, x_2) = (0, 0)$
соответствует $B = (3, 4)$,
$N = (1, 2)$, значению цены 0 и
таблице

0	-4	3
1	1	-2
6	2	1

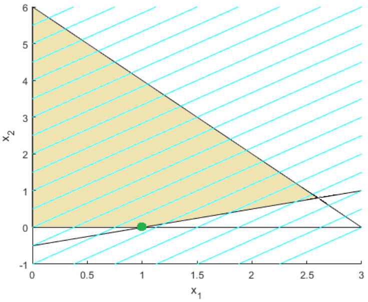
- выбираем столбец 1 $(\xi_1 = -4 < 0)$
- выбираем строку 3 $\left(\frac{\mu_3}{M_{31}} = 1 < 3 = \frac{\mu_4}{M_{41}}\right)$
- пивот-элемент M_{31}



приходим в вершину $(x_1, x_2) = (1, 0)$ с $B = (1, 4)$, $N = (3, 2)$, значением -4 и таблицей

$$\begin{array}{c|cc} 4 & 4 & \color{red}{-5} \\ \hline 1 & 1 & -2 \\ 4 & -2 & \color{blue}{5} \end{array}$$

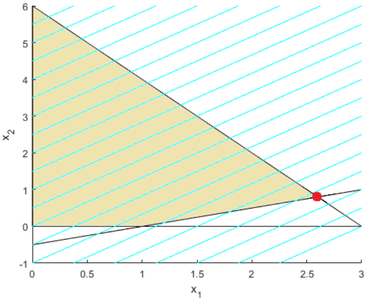
- выбираем столбец 2 ($\color{red}{\xi_2} = -5 < 0$)
- выбираем строку 4 ($\color{blue}{M_{42}} = 5 > 0$)
- пивот-элемент M_{42}



приходим в вершину $(x_1, x_2) = (\frac{13}{5}, \frac{4}{5})$ с $B = (1, 2)$, $N = (3, 4)$, значением -8 и таблицей

$$\begin{array}{c|cc} 8 & 2 & 1 \\ \hline \frac{13}{5} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{array}$$

таблица оптимальна, $\xi \geq 0$



Пример: двойственный симплекс

рассмотрим ту же ЛП

$$\min_{x \in \mathbb{R}^2_+} (3x_2 - 4x_1) :$$

$$x_1 - 2x_2 \leq 1, \;\; 2x_1 + x_2 \leq 6$$

с решением $(x_1, x_2) = (\frac{13}{5}, \frac{4}{5})$

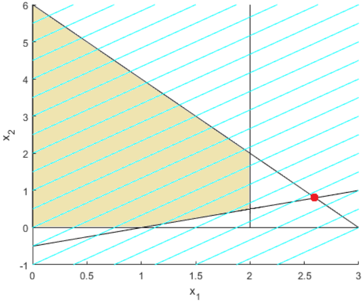
добавим *новое ограничение*

$$x_1 \leq 2$$

и новую невязку

$$x_5 = 2 - x_1$$

решение становится недопустимым



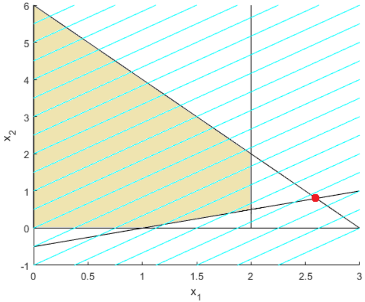
новая невязка базовая, и нужно добавить новую строку в таблицу

теперь $B = (1, 2, 5)$, $N = (3, 4)$

имеем

$$
\begin{aligned}
x_5 &= 2 - \left(\frac{13}{5} - \frac{1}{5}x_3 - \frac{2}{5}x_4\right) \\
&= -\frac{3}{5} - \left(-\frac{1}{5}x_3 - \frac{2}{5}x_4\right)
\end{aligned}
$$

8	2	1
$\frac{13}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$
$\frac{4}{5}$	$-\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$
$-\frac{3}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{2}{5}$

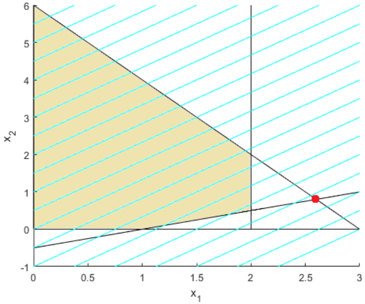


$B = (1,2,5),\ N = (3,4)$

$$\begin{array}{c|cc} 8 & 2 & 1 \\ \hline \frac{13}{5} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ -\frac{3}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \end{array}$$

шаг двойственного симплекса:

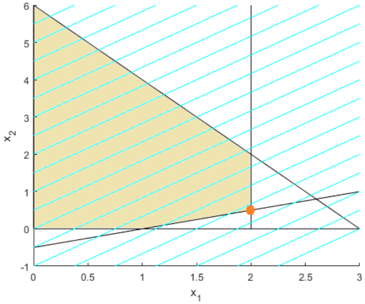
- выбираем строку 5 $(\mu_5 = -\frac{3}{5} < 0)$
- выбираем столбец 4 $(-\frac{\xi_4}{M_{54}} = \frac{5}{2} < 10 = -\frac{\xi_3}{M_{53}})$
- пивот-элемент M_{54}



приходим в вершину $(x_1, x_2) = (2, \frac{1}{2})$ с $B = (1, 2, 4)$, $N = (3, 5)$, значением $-\frac{13}{2}$ и таблицей

$\frac{13}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{2}$
2	0	1
$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{5}{2}$

таблица оптимальна, $\mu \geq 0$



Смешанно-целочисленные линейные программы

ЛП с дополнительными целочисленными ограничениями на часть переменных

$$\min_{x \geq 0} \langle c, x \rangle : \qquad Ax = b, \quad x_i \in \mathbb{Z} \quad \forall\, i \in I$$

в общем NP-сложная задача

удаленением целочисленных ограничений получаем *линейную релаксацию*

$$\min_{x \geq 0} \langle c, x \rangle : \qquad Ax = b$$

её допустимое множество содержит допустимое множество исходной задачи
оптимальное значение релаксации — *нижняя* граница на значение целочисленной задачи

Ветвление

пусть x^* — решение линейной релаксации

если x^*_I — целочисленный вектор, то x^* *оптимальна* также для исходной задачи

иначе существует индекс $i \in I$ такой, что x^*_i дробное

ветвлением по x_i называем построение двух ЛП

$$\min_{x \geq 0} \langle c, x \rangle : \qquad Ax = b, \quad x_i \leq \lfloor x^*_i \rfloor \tag{1}$$

$$\min_{x \geq 0} \langle c, x \rangle : \qquad Ax = b, \quad x_i \geq \lceil x^*_i \rceil \tag{2}$$

- допустимые множества ЛП (1),(2) не пересекаются
- их объединение содержит допустимое множество исходной задачи
- оно не содержит решение x^* релаксации

минимум значений ЛП (1),(2) — лучшая нижняя оценка

Ветвление и ограничение

решатели смешанно-целочисленных ЛП

- рекурсивно разбивают допустимое множество задачи на более мелкие составляющие (ветвление)
- и решают соответствующие линейные релаксации (ограничение)

в дополнение возможно усиление релаксаций:

- до решения релаксации усилением границ на целочисленные переменные (presolve)
- отсечения решения релаксации от выпуклой оболочки целочисленных допустимых точек

Применение двойственного симплекса

ЛП в дочернем узле отличается от ЛП в родительском узле в одном ограничении, а именно, усилением границы на целочисленную переменную x_i, по которой идёт ветвление

в оптимальной таблице соответствующая невязка базовая, ограничение в решении не активно

изменение границы сводится к изменению соответствующего элемента в векторе правой части таблицы на отрицательное значение в интервале $(-1, 0)$
это изменение делает таблицу недопустимой, но она остаётся двойственно допустимой

можем решать новую релаксацию двойственным симплекс-методом

Пример

рассмотрим задачу

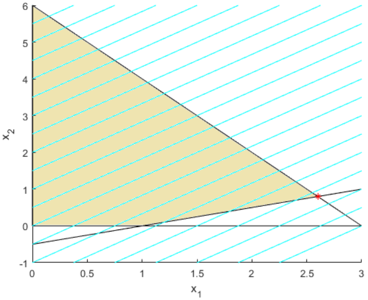
$$\min_{x\in\mathbb{R}^2_+} (3x_2 - 4x_1) : \quad x_1 - 2x_2 \le 1,\ 2x_1 + x_2 \le 6,\ x \in \mathbb{Z}^2$$

линейная релаксация:

$$\min_{x\in\mathbb{R}^2_+} (3x_2 - 4x_1) :$$

$$x_1 - 2x_2 \le 1,\ 2x_1 + x_2 \le 6$$

решение $\left(\frac{13}{5}, \frac{4}{5}\right)$ со значением -8



Пример

ветвим по x_1

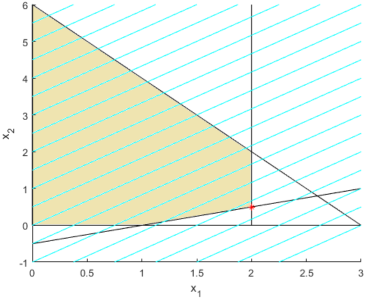
значение в оптимальной точке $x_1^* = \frac{13}{5}$

дочерние ЛП:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^2_+} (3x_2 - 4x_1) :$$

$$x_1 - 2x_2 \leq 1, \; 2x_1 + x_2 \leq 6, \; x_1 \leq 2$$

решение $(2, \frac{1}{2})$ со значением $-\frac{13}{2}$



вторая дочерняя ЛП с ограничением $x_1 \geq 3$ недопустима

Пример

ветвим по x_2, значение в решении релаксации $x_2^* = \frac{1}{2}$

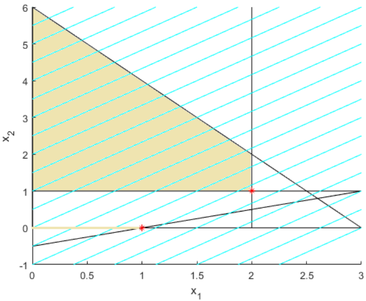
дочерние ЛП:

$$\min_{x \in \mathbb{R}_+^2} (3x_2 - 4x_1) :$$

$x_1 - 2x_2 \leq 1, 2x_1 + x_2 \leq 6, x_1 \leq 2, x_2 \geq 1$

или

$x_1 - 2x_2 \leq 1, 2x_1 + x_2 \leq 6, x_1 \leq 2, x_2 \leq 0$



решения $(2, 1)$ и $(1, 0)$
со значениями -5 и -4

обе ЛП имеют целочисленные решения

оптимальное значение исходной задачи есть меньшее от значений релаксаций, решение $(2, 1)$ со значением -5