Лекция 6. Решение задач маломерной (выпуклой) оптимизации

Напоминание

$f(x)$ – выпукл.

$$\min_{x \in Q \subseteq \mathbb{R}^d} f(x) \qquad Q \text{ – прост. вып.}$$

$|f(y) - f(x)| \le M\|y-x\|_2 \to M$-Lipsch.

$\|\nabla f(y) - \nabla f(x)\|_2 \le L\|y-x\|_2 \to L$-Lipsch. grad

$f(y) \ge f(x) + \langle \nabla f(x), y-x \rangle + \frac{\mu}{2}\|y-x\|_2^2 \to \mu$-сильн. вып.

Таблица 1

$N = \#\nabla f(x)$	M-Lipsch.	L-Lipsch. grad.
выпукл. f	$\frac{M^2R^2}{\varepsilon^2}$	$\sqrt{\frac{LR^2}{\varepsilon}}$
μ-сильн. вып. f	$\frac{M^2}{\mu\varepsilon}$	$\sqrt{\frac{L}{\mu}} \ln\left(\frac{\mu R^2}{\varepsilon}\right)$

с точн. до числ. конст.

$R^2 = \|x^0 - x_*\|_2^2$

ближ. реш. к x^0

$$f(x^N) - f(x_*) \le \varepsilon$$

$$x^{k+1} = x^k - \frac{1}{L}\nabla f\left(x^k + \frac{k-1}{k+2}(x^k - x^{k-1})\right) + \frac{k-1}{k+2}(x^k - x^{k-1})$$

$$x^{k+1} = \pi_Q\left(x^k - h\nabla f(x^k)\right)$$

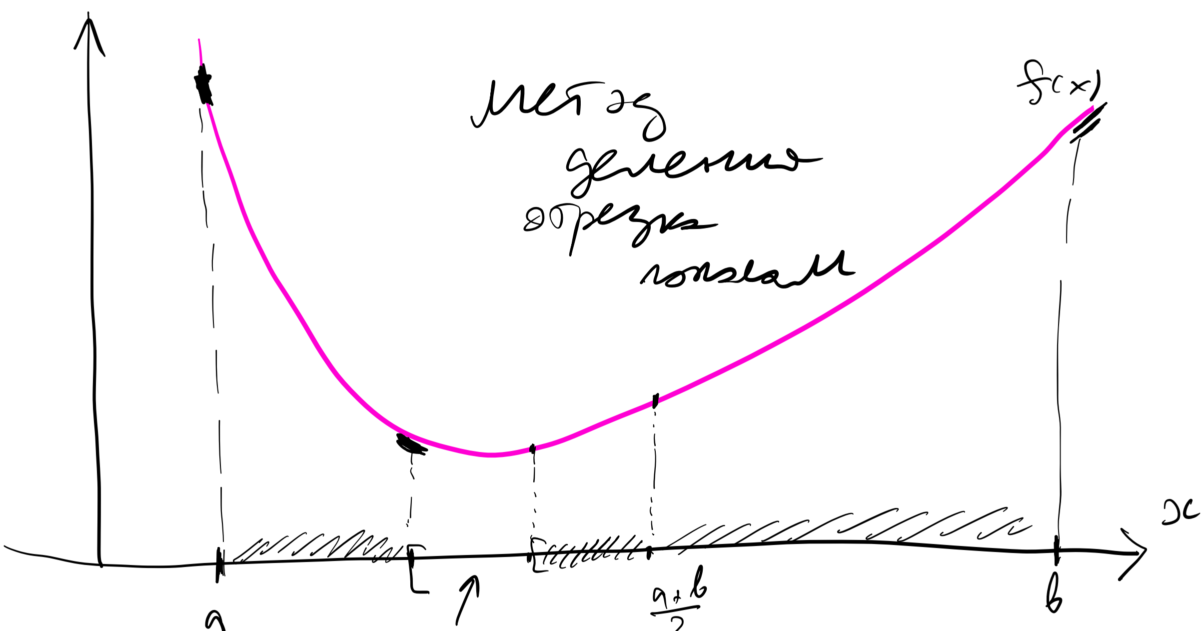
$$\boxed{N \leq d}$$

число $\# \partial f(x)$

размерность пр-ва $\dim x$

А что если $N > d$?

$$\min_{x \in [a,b]} f(x) \qquad (*)$$



$\Delta_k \sim \frac{b-a}{2^k}$

$\log_2 \tilde{\varepsilon}^{-1}$

$\tilde{\varepsilon} = (b-a)/\varepsilon$

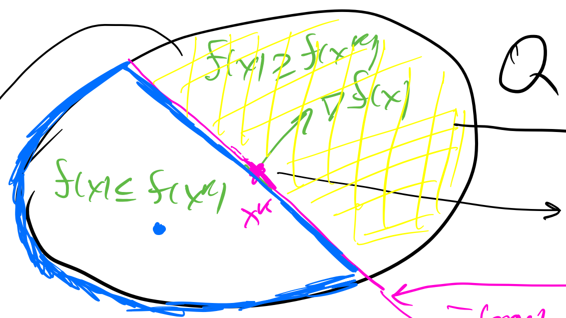
$$\boxed{N \sim \log_2 \varepsilon^{-1}} \qquad d = 1$$

Методы центров тяжести

$1 < d < N$

$$\min_{x \in Q} f(x)$$

Q → вып. компакт.



объем этой части $\in vol_Q \cdot [\frac{1}{e}, 1-\frac{1}{e}]$

центр тяжести.

$= const$ $\quad f(x) - f(x^k) \geq \langle \nabla f(x^k), x - x^k \rangle$

(вып. $f(x)$)

Теорема Грюнбаума-Хаммера

имеет объем $\geq \frac{1}{e} vol_Q$, $e = 2.7\ldots$

После N-итераций

объем того что осталось $\leq \underbrace{\left(1 - \frac{1}{e}\right)^N}_{} = \tilde{\varepsilon}^d$

$N \sim \underbrace{d \log \tilde{\varepsilon}^{-1}}_{}$

r - направление.

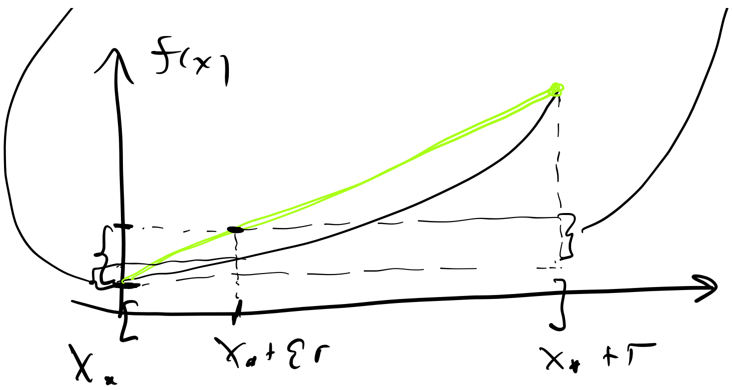
$\tilde{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{\Delta f}$

$x_* + \varepsilon r \in$ тому что осталось

$$\underbrace{f(x_* + \varepsilon r) - f(x_*)}_{} \leq \tilde{\varepsilon} \underbrace{\overbrace{(f(x_* + r) - f(x_*))}^{\leq \Delta f}}_{}$$

(вып. $f(x)$)

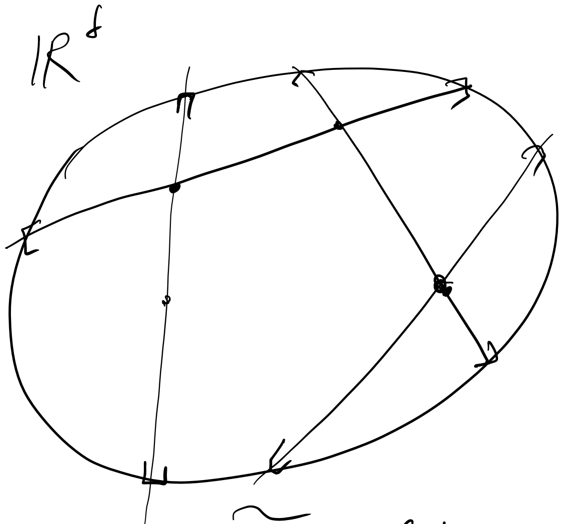
$\max_{x, y \in Q} |f(y) - f(x)|$



$N < d$

$$N \simeq d \log\left(\frac{\Delta f}{\varepsilon}\right)$$

оптим.



Поиск центра тяжести

Hit and Run

$$x^{k+1} = T(x^k)$$

$$\lim_{k\to\infty} x^k = x_0$$

$$x_0 = T(x_0)$$

$$\tilde{O}(d^6)$$

Метод эллипсоидов

70-е годы

Немировский
Юдин
Шор

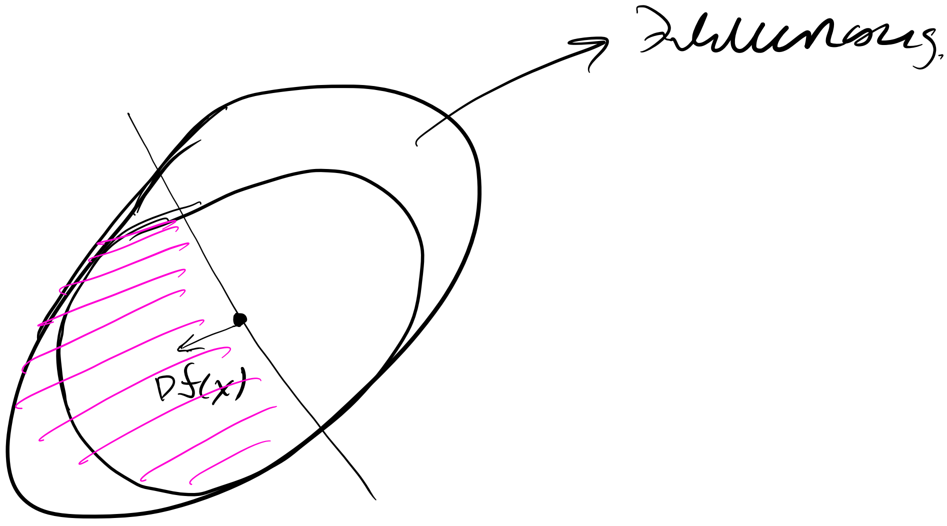
$$\# Df(x) \to N \simeq d^2 \log \frac{MR}{\varepsilon}$$

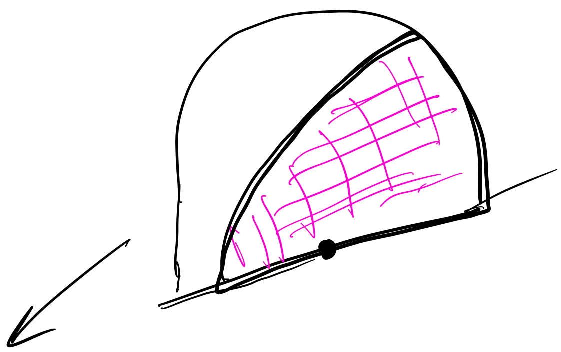
Сложность итерации $O(d^2)$

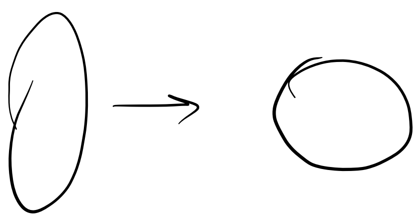
ЛП: $\langle c, x \rangle \to \min$, $Ax = b$, $x \geq 0$

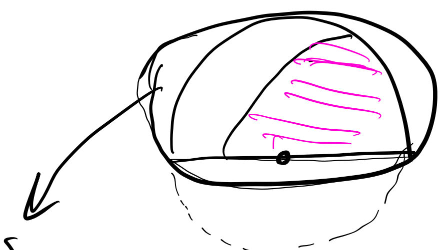
$A_{ij} = a/b$

$$\min_{x \in Q} f(x)$$









объем эллипсоида

$$\sim \left(1 - \frac{1}{d}\right) \mathrm{Vol}(\text{полного шара})$$

$$\left(1 - \frac{1}{e}\right) \longrightarrow \left(1 - \frac{1}{d}\right)$$

$$\left(1-\frac{1}{d}\right)^N \sim \varepsilon^d$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{N \sim d^2 \log \varepsilon^{-1}}$$

Задача о распр. ресурсов

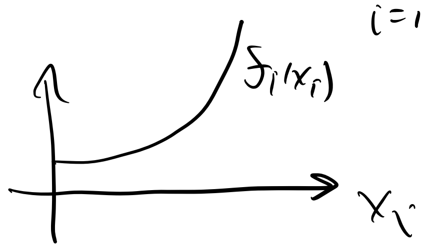
$x_i \in \mathbb{R}$

$$-\sum_{i=1}^n \underbrace{f_i(x_i)} \to \max$$

затраты на произв. тов. объёма x_i

$$\sum_{i=1}^n x_i = C$$

$$x_i \geq 0$$



$$C - \sum_{i=1}^n x_i = 0 \;\Big|\; p$$

$$-\sum_{i=1}^n f_i(x_i) + \underbrace{\min_p p\cdot\left(\sum x_i - C\right)} \to \max_{x_i \geq 0}$$

$$\underbrace{\min_p p\cdot\left(\sum x_i - C\right)} = \begin{cases} -\infty, & \sum x_i \neq C \\ 0, & \sum x_i = C \end{cases}$$

min max =

= max min

$$\max_{x_i \geq 0} \min_p \left\{ \sum_{i=1}^n \left(p x_i - f_i(x_i)\right) - pC \right\}$$

$$\underbrace{\min_p \sum_{i=1}^n \underbrace{\max_{x_i \geq 0} \left(p x_i - f_i(x_i)\right)}_{x_i(p)} - pC}_{\varphi(p)}$$

$$\min_{p} \psi(p) = \sum_{i=1}^{n} \{ p x_i(p) - f_i(x_i(p)) \} - pC$$

$$\psi(p) = \max_{x} F(x,p) = F(x(p),p)$$

$$\psi'(p) = \underbrace{F'_x(x(p),p)}_{0} x'(p) + F'_p(x(p),p) = F'_p(x(p),p)$$

$$F'_x(x(p),p) \equiv 0$$

$$\psi'(p) = \sum_{i=1}^{n} x_i(p) - C$$

p_*

$$\psi'(p_*) = 0$$